



Изучаем условие задачи с помощью компьютерной программы «Живая математика»

Хорошее начало - половина дела
Пословица

Рассмотрим несколько геометрических задач, текст которых содержит какие-то неясности, неопределенности и поэтому требует дополнительных разъяснений для его понимания. Покажем, что компьютерную программу «Живая математика» (далее «ЖМ»), используя ее динамические возможности, целесообразно использовать для понимания содержания задач.

Примеры задач, для понимания которых полезно использовать «ЖМ»

В этом разделе

- рассмотрим три геометрические задачи,
- покажем, что для понимания их текста требуются некоторые дополнительные разъяснения,
- приведем аргументы, что эти разъяснения полезно сопровождать динамическими чертежами, выполненными с помощью компьютерной программы «ЖМ».

Задача 1. Дан угол AOB и точка M внутри него. Построены точки C и D , симметричные точке M относительно сторон этого угла. Доказать, что величина угла COD не зависит от положения точки M (рис. 1).

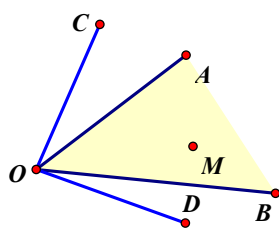


Рис. 1

В тексте этой задачи требует разъяснения выражение «величина угла не зависит от положения точки». Что значит величина угла (число) не зависит от положения точки?

Логика ответа на этот вопрос такова: величина (число) не зависит от положения точки – значит внутри угла можно выбирать разные точки, в соответствии с условиями получаются разные углы, а величина этих углов одна и та же, то есть постоянна.

Данное утверждение проверяется экспериментально. Для этого в соответствии с условием сначала строим произвольный угол AOB , выбираем произвольную точку M внутри него, строим две точки, симметричные точке M относительно сторон угла, строим новый угол, соединяя полученные точки с вершиной данного угла, и измеряем его. Затем внутри угла AOB выбираем еще одну точку и выполняем с ней те же самые действия.

Теперь можно сделать вывод о том, что для двух выбранных случайным образом точек величина построенного угла одна и та же, т.е. постоянна. Для большей убедительности желательно выбрать третью точку, но, пожалуй, и двух точек достаточно, чтобы понять текст задачи.

Проанализируем сложившуюся ситуацию. Выполнение всех перечисленных действий на бумаге требует значительного времени. Динамический чертеж, выполненный в программе «ЖМ», позволяет значительно быстрее и убедительнее получить необходимый вывод.

Теперь уместно поставить вопрос о способе решения задачи. Доказать, что некоторая величина постоянна – значит доказать, что эта величина определенным образом связана с величиной, известной по условию задачи. В нашем случае известна только одна величина

– это угловая мера данного угла AOB . Следовательно, для доказательства достаточно установить зависимость между данным углом и углом построенным. В этом случае полезно измерить два угла (данный и построенный) и сравнить их.

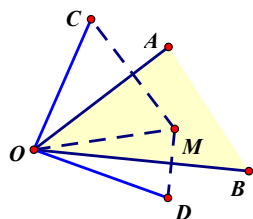


Рис. 2

Теперь полезно изменить заданный угол. Наблюдения позволяют сделать вывод о том, что соотношение между данным и построенным углом сохраняется.

Доказательство выполняется уже без помощи программы «ЖМ». Выполняя чертеж на бумаге, строим точки, симметричные данной, в соответствии с определением (рис.2). Такой чертеж отличается от электронного чертежа, на котором нет необходимости выполнять построение перпендикуляров к осям симметрии. Но он подсказывает способ доказательства:

после проведения отрезка OM достаточно рассмотреть две пары равных треугольников.

Задача 2. Из всех треугольников, у которых одна сторона a , а другая – b , найти треугольник, который имеет наибольшую площадь (рис. 3 и 4).

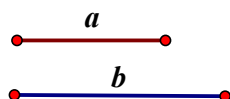


Рис. 3

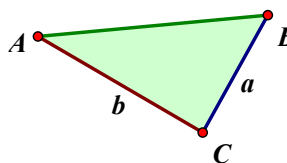


Рис. 4

Рассмотрим текст этой задачи. О каких треугольниках идет речь? Сколько их? Как среди них выбрать треугольник с наибольшей площадью?

Перефразируем задачу. Речь идет о треугольнике, у которого известны две стороны (только две стороны). Таких треугольников можно построить бесконечно много. Каждый из этих треугольников имеет площадь. Среди них нужно выбрать один, тот, у которого площадь наибольшая.

Для понимания содержания задачи полезно последовательно выполнить следующие действия: построить треугольник по двум данным сторонам, построить еще несколько треугольников (хотя бы два) по этим же условиям, найти площадь каждого треугольника, выполнив необходимые измерения, и в результате убедиться, что площади различны. Теперь можно переходить собственно к решению задачи, то есть к поиску треугольника с наибольшей площадью.

Такие построения на бумаге не только требуют значительного времени, но, как правило, не подсказывают результат. Даже если среди построенных треугольников имеется прямоугольный, то нет никакой гарантии, что при следующем построении не получится треугольник с большей площадью.

В этом случае видны преимущества использования программы «ЖМ».

Задача 3. Найти множество точек, из которых касательные, проведенные к данной окружности, равны данному отрезку (рис. 5)

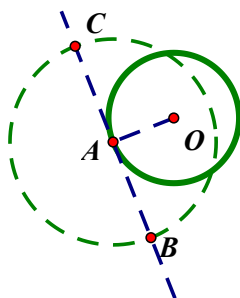


Рис. 5

Известно, что решение задач на нахождение множества этапов, принципиально различных по своей логике. Сначала налюдения, в результате которых возникает догадка о том, каково чек. Эта догадка формулируется в виде гипотезы. Затем для формулируются и доказываются два утверждения (прямое и противоположное).

Остановимся на первом этапе. Здесь возникает сразу несколько вопросов: о каких точках идет речь; как их построить; сколько их; какую геометрическую фигуру они образуют; как ее построить.

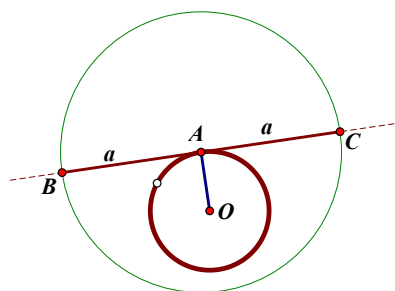


Рис. 6

Для понимания содержания задачи (о каких точках идет речь) сначала решаем подготовительную задачу: построить такую точку, чтобы отрезок касательной к окружности, проведенной из этой точки, до точки касания был равен данному отрезку (рис. 6). В результате выполненных построений получаем две искомые точки (В и С).

Для выдвижения гипотезы следует увидеть еще хотя бы две-три пары точек, удовлетворяющих условию задачи. Выбирая разные точки окружности (первый шаг построения), повторяем построение ещё и ещё раз.

Искомых точек следует построить ровно столько, чтобы можно было выдвинуть правдоподобную гипотезу. И в этом случае построение на бумаге требует длительного времени. Применяя программу «ЖМ», можно ускорить процесс, имея личный инструмент для построения искомой точки.

В этой программе существует еще одна возможность, позволяющая ускорить процесс выдвижения гипотезы: для одной из искомых точек (или для обеих) в меню ВИД отметим опцию ОСТАВЛЯТЬ СЛЕД, а затем подвинем курсором точку касания (точку А). При движении точки А движется и точка В, оставляя цветной след. Именно этот след и позволяет увидеть, какую фигуру образует множество точек, о которых идет речь в задаче, т.е. сформулировать гипотезу.

Подведем итоги. В рассмотренных задачах для того, чтобы понять, уяснить, уточнить их содержание, приходится неоднократно выполнять некоторые поисковые построения. Выполнение соответствующих действий на бумаге требует значительного времени. Использование компьютерной программы «ЖМ» позволяет значительно ускорить этот процесс. С помощью динамического чертежа, выполненного в этой программе, необходимые факты могут быть обнаружены быстрее и становятся более очевидными.

Надеюсь, что приведенные аргументы представляются достаточно убедительными. В таком случае можно обратиться к файлу «Изучаем условие задачи». В нем каждая из рассмотренных задач приготовлена для иллюстрации тех особенностей, о которых сказано выше.

Технология создания чертежей на экране для разъяснения содержания геометрической задачи

Этот раздел предназначен для тех пользователей, которые желают своими силами создать необходимые материалы.

Здесь излагаются алгоритмы построения чертежей и выполнения необходимых наблюдений на экране для решения тех трех задач, которые были рассмотрены в предыдущем разделе.

Кроме того, для пользователей, которые, может быть, еще не владеют прочными навыками работы с программой «ЖМ», дано описание некоторых особенностей этих алгоритмов, а также создана памятка, чтобы предупредить некоторые типичные затруднения при выполнении действий на экране.

Начнем с памятки. В ней пять правил:

1. Если с объектом нужно выполнить какое-либо действие, то *этот объект должен быть выделен*.
2. Должны быть выделены *только те* объекты, с которыми производится очередное действие.
3. Чтобы сбросить выделение, достаточно щелкнуть курсором по чистому полю чертежа.
4. Если нужно выделить часть геометрической фигуры, а при щелчке выделилась вся фигура, достаточно повторить щелчок *в том же самом месте*. (Если нужно выделить всю фигуру, а при щелчке выделилась часть этой фигуры, достаточно повторить щелчок в этом же месте еще раз.)
5. При построении окружности на ней всегда фиксируется некоторая точка. Это так называемая *точка – радиус*. Она в дальнейшем для решения задачи не нужна. Однако ее не следует прятать раньше времени. По окончании построения часто приходится изменять размеры чертежа. В этом случае может пригодиться именно эта точка, так как с ее помощью можно изменять радиус окружности. Поскольку у этой точки особая роль, советуем выделить ее особым цветом, отличающим ее от всех остальных точек (у нас это белая точка).

Теперь сделаем несколько важных замечаний по поводу предлагаемых алгоритмов. Дело в том, что термины, используемые в программе, не всегда совпадают с терминами, принятыми в школьных учебниках.

Первое замечание выскажем по поводу выполняемых построений. Отдельный шаг построения может содержать несколько элементарных шагов. Например, задание «Построить угол COD» означает, что сначала, выделив точки O и C, следует построить отрезок OC, а затем, выделив точки O и D, построить отрезок OD. Некоторые построения сформулированы иначе, чем в самой программе «ЖМ». Так, задание «Построить точку, симметричную данной относительно прямой», в программе «ЖМ» читается иначе: «Отразить».

Второе замечание связано с выполняемыми измерениями. Их желательно оформлять в виде таблицы. В таком случае проще наблюдать за теми изменениями, которые происходят в результате движения геометрической фигуры или ее частей.

Третье замечание касается организации движения. Дело в том, что в программе «ЖМ» для этого имеются различные возможности. В нашем случае предпочтительно выбрать движение с помощью курсора. Тогда можно самостоятельно регулировать скорость движения, а также фиксировать отдельные положения фигуры в соответствии со своими потребностями.

И, наконец, *четвертое замечание*. План построения чертежа может существенно отличаться от предлагаемого в данной работе. Приведу два примера. В задаче 1 точку M, положение которой по условию должно меняться, можно построить иначе. Во-первых, с помощью некоторых дополнительных построений можно задать траекторию движения точки M внутри угла, тогда для наблюдений можно воспользоваться анимацией этой точки. Во-вторых, можно поступить точно так же, как в «бумажном» варианте: построить две точки и измерить два соответствующих угла. Представляется, что оба эти варианта неэкономичны.

Второй пример касается задачи 2. Используя возможности программы «ЖМ», треугольник по двум сторонам можно построить разными способами. Не все они одинаково удачны для дальнейших наблюдений. Дело в том, что при движении геометрической фигуры могут изменяться и размеры, и взаимное положение отрезков и углов. В нашем случае следует так построить треугольник, чтобы две его стороны оставались неизменными при любом перемещении чертежа. (Они заданы!).

Далее сформулируем три алгоритма для реализации трех задач. Результат выполнения этих алгоритмов - в файле «Три задачи».

Задача 1. Дан угол AOB и точка M внутри него. Построены точки C и D , симметричные точке M относительно сторон этого угла. Доказать, что величина угла COD не зависит от положения точки M .

Выполните следующие действия:

Первый этап – построение чертежа

- 1) Постройте произвольный угол AOB и точку M внутри него;
- 2) постройте точку C , симметричную точке M , относительно прямой OA ;
- 3) постройте точку D , симметричную точке M , относительно прямой OB ;
- 4) постройте угол COD .

Второй этап – первоначальные наблюдения

- 5) Измерьте углы AOB и COD ;
- 6) сравните их величины.

Третий этап – наблюдения за движущейся точкой

- 7) Подвиньте курсором точку M ;
- 8) понаблюдайте за изменением величин углов AOB и COD ;
- 9) еще раз подвиньте курсором точку M ;
- 10) и снова понаблюдайте за изменением величин углов AOB и COD ;
- 11) сделайте вывод: как связаны величины этих углов;
- 12) сделайте вывод: как зависит величина угла COD от положения точки M .

Четвертый этап – наблюдения за изменением данного угла

- 13) с помощью курсора измените величину угла AOB ;
- 14) снова понаблюдайте за величиной угла COD ;
- 15) еще раз сделайте выводы: как связана величина угла COD с величиной данного угла и с положением точки M внутри этого угла.

Задача 2. Из всех треугольников, у которых одна сторона a , а другая – b , найти треугольник, который имеет наибольшую площадь.

Выполните следующие действия:

Первый этап – построение данных отрезков

- 1) Постройте два произвольных отрезка (назовем их a и b).

Второй этап - построение треугольника

- 2) Постройте произвольную точку C ;
- 3) постройте окружность с центром C и радиусом a ;
- 4) поместите точку B на эту окружность;
- 5) постройте окружность с центром C и радиусом b ;
- 6) поместите точку A на эту окружность;
- 7) постройте отрезки AB , BC и AC ;
- 8) спрячьте окружности;
- 9) постройте внутреннюю область треугольника ABC .

Третий этап – тестирование треугольника

- 10) Треугольник подвигайте курсором - убедитесь, что две стороны не изменяются, а остальные измерения меняются.

Четвертый этап - наблюдения

- 11) измерьте стороны треугольника;
- 12) измерьте углы треугольника;
- 13) измерьте площадь треугольника;
- 14) подвигайте треугольник;
- 15) понаблюдайте за изменениями измеренных величин;
- 16) сделайте выводы: изменяется ли площадь;
- 17) подвигайте треугольник и установите такое положение, при котором его площадь наибольшая (или близка к ней);

18) проанализируйте чертеж и таблицу измерений и определите вид треугольника.

Задача 3. Найти множество точек, из которых касательные, проведенные к данной окружности, равны данному отрезку.

Выполните следующие действия:

Первый этап – построение данных элементов (отрезка и окружности)

1) Постройте данный отрезок a и данную окружность с центром O и произвольным радиусом – эти элементы заданы по условию.

Второй этап – построение треугольника

2) Постройте произвольный радиус OA ;

3) постройте перпендикуляр к радиусу OA в точке A ;

4) постройте окружность с центром A и радиусом a

5) постройте точки пересечения этой окружности и перпендикуляра – точка B и C – это искомые точки.

Третий этап – построение множества искомых точек

6) Постройте ещё один произвольный радиус OK ;

7) повторите действия 3 – 5 для этого радиуса;

8) постройте ещё один произвольный радиус OM ;

9) повторите действия 3 – 5 для этого радиуса;

10) наблюдайте за всеми искомыми точками и сформулируйте гипотезу: какое множество образуют эти точки.

Четвертый этап – наблюдение искомого множества точек

11) Удалите точки K и M – соответственно будут удалены и другие построенные точки;

12) выделите точку B и в меню ВИД отметьте строку ОСТАВЛЯТЬ СЛЕД;

13) подвиньте курсором точку A и посмотрите, какую геометрическую фигуру образует след точки B ;

14) выделите точки B и C и в меню ВИД отметьте строку ОСТАВЛЯТЬ СЛЕД;

15) подвиньте курсором точку A и посмотрите, какую геометрическую фигуру образуют следы точек B и C .

В заключение предлагается самостоятельно составить алгоритмы построения чертежей и выполнения необходимых наблюдений для разъяснения содержания следующих задач:

1. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена секущая, пересекающая окружности в точках C и D . Докажите, что угол CBD *не зависит* от выбора секущей, проходящей через точку A .
2. Через точку A , лежащую вне окружности, проведена секущая, которая пересекает окружность в точках B и C . Докажите, что произведение отрезков AB и AC *не зависит* от выбора секущей, проходящей через данную точку A .
3. На отрезке AB отмечена точка C . На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности. Докажите, что сумма длин окружностей *не зависит* от выбора точки C .
4. Из всех прямоугольников, имеющих периметр $2p$, найдите прямоугольник, имеющий *наибольшую площадь*.

Приложения

1. Файл «Три задачи»
2. Файл «Изучаем условие задачи»

Июнь 2017 года