

## О комбинаторных задачах

А.Ф.Харшиладзе

Институт новых технологий, Москва, Россия

[kharsh@maildisk.ru](mailto:kharsh@maildisk.ru)

### Аннотация

Установлена взаимная зависимость и связь между следующими компетенциями или признаками интеллектуального развития детей, и не только детей: достижение 4-й стадии интеллектуального развития Пиаже, способность решать комбинаторные задачи, способность пользоваться языком теории множеств, способность к программированию, умение пользоваться понятием доказательства. В качестве способа диагностики всех этих компетенций как у детей, так и у взрослых, предлагается разработанный в Институте новых технологий продукт «Цветные камешки. Конечные множества» (см. [mog-edu.ru](http://mog-edu.ru)). Понимание и учёт этих зависимостей важны в практическом образовании.

Обсуждается гипотеза С.Пейперта о сближении (по времени наступления) 3-й и 4-й стадий Пиаже в будущем, и даже, возможно, об их инверсии, когда использование компьютеров детьми станет повсеместным. Гипотеза Пейперта на языке, более привычном для математиков, фактически означает вопрос о том, что первично, числа или множества? С этих позиций становится ясным, что имеющая место в настоящее время последовательность наступления 3-й и 4-й стадий Пиаже выглядит, как парадокс.

Детям, желающим овладеть программированием, рекомендуется предварительно пройти курс [mog-edu.ru](http://mog-edu.ru), это привлечёт их внимание к фундаментальным понятиям программирования, а технические детали отодвинет на второй план.

**Ключевые слова:** комбинаторика, конечные множества, доказательство, программирование, способности, интеллектуальное развитие.

**Выходные данные:** Работа выполнена А.Ф.Харшиладзе при помощи и содействии сотрудников Института новых технологий: В.В.Крутов, С.А.Трактуюева, М.А.Лесенкина.

## **About combinatory problems**

**A.F.Kharshiladze**

**Institute of the New Technologies, Moscow, Russia**

[khmarsh@maildisk.ru](mailto:khmarsh@maildisk.ru)

### **Abstract**

Mutual dependence and connection between the following competencies or signs of the intellectual development of children, and not only children, has been established: achievement of the 4th stage of Piaget's intellectual development, the ability to solve combinatorial problems, the ability to use the language of set theory, the ability to program, the ability to use the concept of proof. As a way to diagnose all these competencies in both children and adults, the product "Colored stones. Finite sets" (see mog-edu.ru). Understanding and taking into account these dependencies is important in practical education.

The paper discusses S. Papert's hypothesis about the convergence (in time of onset) of Piaget's 3rd and 4th stages in the future, and even, possibly, their inversion, when the use of computers by children becomes ubiquitous. Papert's conjecture, in a language more familiar to mathematicians, actually means the question of what comes first, numbers or sets? From these positions, it becomes clear that the current sequence of the onset of the 3rd and 4th stages of Piaget looks like a paradox.

Children who want to learn programming are recommended to take the mog-edu.ru course first, this will draw their attention to the fundamental concepts of programming, and push the technical details into the background.

**Key words:** combinatorics, finite sets, proof, programming, ability, intellectual development.

**Output data:** The work was done by A.F.Kharshiladze with the help of his colleagues in the Institute of the New Technologies: V.V.Kroutov, S.A.Traktueva, M.A.Lecenkina.

Жан Пиаже, анализируя интеллектуальное развитие детей, выделил 4 стадии интеллектуального (когнитивного) развития детей и сформулировал основные характеристики каждой из этих стадий [1]. Третья, предпоследняя стадия, называемая, согласно Пиаже, «*периодом конкретных операций*», это стадия, когда дети начинают пользоваться числами, в частности начинают осознавать «закон сохранения» жидкости при переливании из одного сосуда в другой (например, имеющий другую форму) и, последняя, четвёртая, стадия, называемая «*периодом формальных операций*», которая наступает у детей в возрасте 11 - 12 лет, характеризуется возникшей у детей в этом возрасте способностью решать «*комбинаторные задачи*». Вот как описывает Сеймур Пейперт в книге [2] разницу в интеллектуальном развитии детей до и после возрастной границы в 11 – 12 лет:

«Выделение стадии конкретных операций подтверждается тем наблюдением, что в нашем обществе дети в возрасте 6 – 7 лет обычно совершают прорыв во многих областях познания и, по-видимому, все сразу. Они оказываются в состоянии пользоваться числами, ориентироваться в пространстве и времени, рассуждать используя закон транзитивности, строить системы классификации. Но всё-таки остаются вещи, которые дети этого возраста делать не умеют. В частности, они запутываются в ситуациях, в которых требуется подумать не о том, каковы вещи, а о всех способах, какими эти вещи можно упорядочить.» [2, с 174]. Далее Пейперт очень кратко приводит пример, который он (очевидно, следуя в этом Пиаже) считает наиболее типичным примером такого задания, которое отделяет детей 4-й стадии от детей 3-й стадии:

«Ребёнку даётся набор цветных шариков, например, зелёных, красных, голубых и чёрных, и его просят распределить эти шарики по всевозможным парам: зелёно-голубым, зелёно-красным, зелёно-чёрным – и затем проделать то же самое для трёх цветов и т.д. Подобно детям, до семилетнего возраста не осваивающим принцип сохранения, дети всего мира не в состоянии выполнить эту задачу по комбинаторике, пока им не исполнится 11 – 12 лет. На самом деле, многие интеллигентные взрослые в своей обычной жизни никогда не овладевают этой способностью.»

И далее:

«Что же отличает так называемые конкретные операции, включающие соблюдение принципа сохранения, от так называемых формальных операций, включающих задачи по комбинаторике?» [2, с 174].

Исследование когнитивного развития детей было проведено весьма добросовестно и на большом материале:

«Разумеется, такие исследования были проведены при изучении стадий развития по Пиаже. Детей всех уровней развития, какие только в состоянии различить антрополог, и из сотен различных человеческих сообществ всех континентов просили ответить на вопрос о переливании жидкости и распределить шарики. Во всех случаях, когда вообще фиксировались навыки владения принципом сохранения и комбинаторикой, сохранением количества умели оперировать дети в возрасте 5 лет и старше, но всегда моложе по возрасту тех детей, которые справлялись с задачами по комбинаторике.» [2, с 176].

Что же это за задачи «по комбинаторике», о которых пишут Пейперт и Пиаже, и, которым они придают такое большое значение для диагностики интеллектуального развития ребёнка, точнее для диагностики его перехода с третьей на четвёртую стадию развития? Коротких фрагментов описания этих задач в книге Пейперта достаточно, чтобы понять, о чём тут идёт речь: в более адекватных математических терминах речь идёт о теории конечных множеств. Вот как задача о распределении цветных шариков по всевозможным парам цветов формулируется математически: задано конечное множество цветов (в описанном Пейпертом случае это множество состоит из 4 элементов), требуется выложить шариками все подмножества мощности 2 этого множества. Это одна из самых часто используемых задач теории конечных множеств: известно, что если множество  $M$  имеет мощность  $m$  (т.е. состоит из  $m$  элементов), то число его подмножеств мощности  $k$  равно  $m! / (k! * (m-k)!)$ , здесь восклицательный знак после целого положительного числа обозначает «факториал»:  $m! = 1 * 2 * \dots * m$  – произведение всех целых чисел от 1 до  $m$ . Числа  $m! / (k! * (m-k)!)$  называются *биномиальными коэффициентами*, эти числа используются во многих формулах математики, например, в формуле *бинома Ньютона*. В примере Пейперта с цветными шариками четырёх цветов имеется ровно 6 пар цветных шариков: ребёнок, достигший 4-й стадии интеллектуального развития, должен суметь выложить все эти 6 пар шариков. В самом деле, в множестве мощности 4 подмножеств мощности 2 имеется 6, а подмножеств мощности 3 имеется 4.

Таким образом, мы приходим к заключению, что четвёртой стадией интеллектуального развития Пиаже фактически называет способность людей к простейшим операциям с конечными множествами.

Пейперт заметил связь между «формальными операциями» Пиаже и способностью детей и людей к программированию. Пиаже такой связи, вероятно, не видел и не мог видеть, т.к. при его жизни (он умер в 1980 году) программирование, хотя и существовало, но не было настолько распространено, чтобы привлечь внимание исследователя по психологии. Пейперт

придаёт этой связи большое значение, т.к. видит в детском программировании огромный потенциал для интеллектуального развития детей, в чём с ним трудно не согласиться. Говоря о программировании, Пейперт имеет ввиду не профессиональное, а «детское» программирование, для этого он вместе со своими сотрудниками из Массачузетского технологического института создали специальный детский язык программирования «Лого». Язык «Лого» был разработан в 1967 году и вобрал в себя все самые передовые идеи программирования того времени. Но главное его достоинство состоит в том, что его не нужно «изучать», на нём можно начать программировать с первых минут знакомства с ним. Здесь не место обсуждать детали этого языка, отметим лишь важность этого языка как для развития программирования, так и для развития образования в целом.

На теоретическом и математическом уровне связь теории конечных множеств, или комбинаторики, если кому-то этот термин нравится больше, с программированием гораздо глубже, чем это кажется, когда вы подходите к вопросу с психологической, а не с математической точки зрения. В самом деле, для программирования характерны утверждения, которые делаются относительно множества объектов, в то время как в повседневной речи утверждения чаще делаются относительно одного конкретного объекта. Произвольный человек, и не обязательно ребёнок, без специальной тренировки обычно неточно, если не сказать, неправильно понимает утверждения относительно множества объектов. В повседневной речи большинства людей разница между утверждением, сделанным относительно всех элементов множества и относительно лишь некоторых его элементов, не слишком бросается в глаза и вполне может восприниматься многими слушателями таких утверждений, как несущественная.

Около 60 лет назад, когда автор этих строк учился в школе, в школьном курсе математики присутствовал раздел «Комбинаторика». Позже этот раздел был исключён из программы, видимо, по причине его слишком большой трудности для подавляющего большинства учащихся. В этом разделе изучались такие понятия, как «размещения», «сочетания», «перестановки» и бином Ньютона. Я думаю, что главная причина трудности этого раздела для большинства учащихся состояла в том, что речь шла фактически о конечных множествах, а терминология применялась из какой-то другой неизвестной мне области. Стоило лишь начать применять адекватную теоретико-множественную терминологию: «множество», «подмножество», «отображение», «вложение», как все трудности с пониманием этого курса были бы преодолены. Но использование теоретико-множественной терминологии наталкивается на психологические трудности, природа

которых мне стала ясна лишь, когда я узнал о четвёртой стадии интеллектуального развития Пиаже. Примерно о тех же трудностях пишет Пейперт, но делает это иначе: «Наша культура насыщена числом, процедуры систематизации в ней представлены слабо.» [2, с 175].

Пейперт в [2, 174 – 176] высказывает гипотезу о том, что возрастная разница в 5 лет между детьми, овладевшими принципом сохранения жидкости, и детьми, умеющими решать комбинаторные задачи с цветными шариками, которая проявилась в исследованиях Пиаже в докомпьютерную эпоху, исчезнет в эпоху, когда компьютеры станут частью повседневной жизни детей. Доказать экспериментально эту гипотезу Пейперт не мог, поскольку во время активной части его жизни компьютеры только появились, но не стали ещё частью повседневной жизни детей (Пейперт умер в 2016 году в возрасте 88 лет). Для доказательства гипотезы Пейперта, очевидно, нужно было бы повторить в новых условиях грандиозные исследования Пиаже «для разных человеческих сообществ на всех континентах», но сам Пейперт, будучи увлечённым энтузиастом, верит в свою гипотезу и без доказательства: «Если компьютеры и программирование станут частью повседневной жизни детей, возрастной разрыв в овладении принципами сохранения и комбинаторикой, несомненно, исчезнет, а возможно, приобретёт обратный характер: дети сначала начнут овладевать систематизацией, а затем количеством» [2, с 176].

В более привычных для математиков терминах речь тут идёт о том, что первично: числа или множества? Очевидно, что первичны множества. В самом деле, множества повсеместно окружают нас в жизни, и они существовали ещё тогда, когда человека не было на Земле. Числа же были придуманы человеком для измерения размера множеств, для измерения того, насколько много элементов в множестве. Потом люди придумали операцию сложения чисел, которая происходит из операции объединения непересекающихся множеств. Что такое объединение двух непересекающихся множеств было понятно первобытному человеку задолго до появления чисел: это, например, смешивание двух кучек камней в одну кучку. Но странным образом операциям с числами (третья стадия по Пиаже) дети обучаются раньше, чем операциям с множествами (четвёртая стадия). По мнению Пейперта после того, как компьютеры станут частью повседневной жизни детей, порядок развития интеллекта детей изменится и станет более естественным (можно сказать, биогенетическим): сначала множества, а затем числа. Четвёртая и третья стадии Пиаже поменяются местами.

Возможности подтвердить или опровергнуть гипотезу Пейперта у нас нет, но может быть будущие поколения смогут наблюдать её подтверждение или опровержение.

Имеется ещё одно когнитивное понятие, связанное с четвёртой стадией Пиаже, это понятие *доказательства*. Парадоксальным образом в повседневной жизни это понятие почти не используется. Как остроумно замечал В.А.Успенский (см. [3]), это понятие регулярно используется лишь в двух сферах человеческой деятельности: в математике и в юриспруденции и роднит эти две области.

В повседневной жизни использование понятия доказательства могло бы быть очень полезно, ведь люди часто спорят, и эти споры иногда доходят до рукоприкладства, при этом почти всегда наиболее горячие споры при спокойном анализе оказываются беспредметными. Казалось бы, стоит каждой из спорящих сторон попытаться просто *доказать* свою правоту, и спор мог бы спокойно и бескровно разрешиться. Но проблема в том, что многие люди не готовы к этому, и эта неготовность очень похожа на то, что эти люди ещё не достигли 4-й стадии Пиаже.

Несколько лет назад в Институте новых технологий ([www.int-edu.ru](http://www.int-edu.ru)) был разработан и размещён на [mog-edu.ru](http://mog-edu.ru) онлайн-практикум «Цветные камешки. Конечные множества» [4], посвящённый *комбинаторике* или, в нашей терминологии, *теории конечных множеств*. В этом продукте в графически привлекательном виде представлены все мыслимые задачи конечной теории множеств. Я не буду здесь перечислять эти задачи, читатель сам может их посмотреть по указанному url-адресу. На мой взгляд именно эти задачи дают максимально полную картину того, что можно считать четвёртой стадией интеллектуального развития детей, впрочем, не только детей, но и всех людей. Задач в этом продукте много, они представлены в порядке возрастающей сложности, и в каждом разделе вводятся понятия, необходимые для выполнения заданий. Детям в возрасте 12–15 лет я рекомендовал бы лишь первые два раздела: «Простыми словами» и «Множества», взрослым – все разделы, и как наивысшее достижение: пройти аттестацию с присвоением звания «Мастер Конечных Множеств».

Обратим внимание на последнюю фразу *«На самом деле, многие интеллигентные взрослые в своей обычной жизни никогда не овладевают этой способностью.»* из уже приведенной в начале статьи цитаты из книги Пейперта. Как понимать эту фразу? Очевидно, так, что многие «интеллигентные», т.е. достаточно умные и образованные взрослые люди до конца своей жизни не достигают четвёртой стадии интеллектуального развития. Кажется, здесь имеется противоречие: какие же они интеллигентные, если не достигли той стадии развития, которой обычные нормальные дети достигают в возрасте 11–12 лет? Эта фраза звучит, как эмоциональное восклицание Пейперта, сожалеющего о том, что система организованного образования всего мира допускает такие пробелы в массовом образовании,

которых, как он надеется, не будет в будущем, когда «компьютеры и программирование станут частью повседневной жизни детей». И я присоединяюсь к этим его надеждам.

## **Выводы.**

Следующие шесть способностей человека если не совпадают, то по крайней мере близки, это значит, что у каждого человека эти способности либо есть, либо отсутствуют все одновременно:

1. Достижение четвёртой стадии интеллектуального развития Пиаже «период формальных операций»;
2. Способность решать комбинаторные задачи по раскладыванию цветных шариков;
3. Способность к программированию;
4. Способность овладеть и пользоваться теоретико-множественной терминологией;
5. Способность использовать доказательства;
6. Способность решить задачи первых двух разделов продукта «Цветные Камешки. Конечные множества» ([mog-edu.ru](http://mog-edu.ru)).

«Цветные камешки. Конечные множества» предоставляет возможность всем желающим определить, насколько они достигли четвёртой стадии интеллектуального развития по Пиаже. А также может помочь детям, желающим научиться программировать, развить свой интеллект в нужном для этого направлении.



## Литература.

1. Жан Пиаже. Избранные психологические труды. Генезис числа у ребёнка. Просвещение. 1969.
2. С.Пейперт. Переворот в сознании: дети, компьютеры и плодотворные идеи. Перевод с английского. Москва. Педагогика. 1989.  
Seymour Papert. Mind storms: Children, computers and powerful ideas. Basic Books, Publishers, Inc. / New York.
3. Успенский В.А. Труды по нематематике. Москва. ОГИ. 2002.
4. Цветные камешки. Конечные множества. Онлайн-продукт. Институт новых технологий. Включён в Единый реестр российских программ для электронных вычислительных машин и баз данных (№13385 от 26.04.2022), *mog-edu.ru*.